



CONCURSUL JUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „PETRU MAIOR”

Colegiul „Petru Maior” Reghin

EDIȚIA a II-a, 9.04.2022

Clasa a IX-a

BAREM DE EVALUARE ȘI CORECTARE

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii***Problema 1**

a) Suma a trei numere în progresie aritmetică este egală cu 21. Dacă acestora li se adună numerele 2,3 și 9 atunci se obțin alte trei numere în progresie geometrică. Determinați cele trei numere inițiale.

b) Arătați că $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} : 19, \forall n \geq 1$.

Soluție:

a) Se consideră numerele în progresie aritmetică $a-r, a, a+r \Rightarrow a-r+a+a+r=21 \Leftrightarrow a=7$... **1p**

Atunci avem numerele: $7-r, 7, 7+r$ căroră le adunăm 2,3 și 9 $\Rightarrow 9-r, 10, 16+r$ sunt în

progresie geometrică $\Leftrightarrow 10^2 = (9-r) \cdot (16+r) \Leftrightarrow r^2 + 7r - 44 = 0$ **1p**

cu soluțiile $r_1 = -11$ și $r_2 = 4$.

Atunci numerele sunt 18, 7, -4 sau 3, 7, 11..... **1p**

b) Fie $P(n): 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} : 19, \forall n \geq 1$.

I. Etapa de verificare: $P(1): 5^3 \cdot 2^3 + 3^3 \cdot 2^3 = 1216 = 19 \cdot 64 : 19$ (A) **1p**

II. Etapa de demonstrație: $P(k) \rightarrow P(k+1)$, adică presupunem $P(k): 5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1} : 19$ (A)

și trebuie demonstrat că $P(k+1): 5^{2k+3} \cdot 2^{k+3} + 3^{k+3} \cdot 2^{2k+3} : 19$ este adevărat.

Din $5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1} : 19 \Rightarrow \exists M \in \mathbb{N}$ astfel încât $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} = 19M - 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ **1p**

Atunci $5^{2k+3} \cdot 2^{k+3} + 3^{k+3} \cdot 2^{2k+3} = 5^2 \cdot 2 \cdot 5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 3 \cdot 2^2 \cdot 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1} =$

$50(19M - 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1}) + 12 \cdot 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1} = 50 \cdot 19M - 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1} (50 - 12) =$

$19 \cdot (50M - 2 \cdot 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1}) : 19 \Rightarrow P(k+1)$ este adevărat.

Din I și II, pe baza principiului inducției matematice, rezultă că cerința este verificată..... **2p**

Problema 2

Se dau funcțiile $f_m, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ date prin:

$$f_m(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-\infty, 2] \\ mx-3, & x \in (2, \infty) \end{cases}, m \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} x-1, & x \in (-\infty, 3] \\ \frac{x+3}{3}, & x \in (3, \infty) \end{cases}. \text{ Se cere:}$$

a) Determinați funcția $h = g \circ f_3$.

b) Studiați monotonia funcției f_m , pentru toate valorile $m \in \mathbb{R}$.

Soluție:

$$a) h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = (g \circ f_3)(x) = \begin{cases} f_3(x) - 1, & f_3(x) \leq 3 \\ \frac{1}{3}(f_3(x) + 3), & f_3(x) > 3 \end{cases} = \dots\dots\dots \quad \mathbf{1p}$$

$$h(x) = \begin{cases} x+1-1, & x+1 \leq 3 \text{ și } x \leq 2 \\ 3x-3-1, & 3x-3 \leq 3 \text{ și } x > 2 \\ \frac{1}{3}(x+1+3), & x+1 > 3 \text{ și } x \leq 2 \\ \frac{1}{3}(3x-3+3), & 3x-3 > 3 \text{ și } x > 2 \end{cases} = \dots\dots\dots \quad \mathbf{1p}$$

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \leq 2 \text{ și } x \leq 2 \\ 3x-4, & x \leq 2 \text{ și } x > 2 \\ \frac{1}{3}(x+4), & x > 2 \text{ și } x \leq 2 \\ x, & x > 2 \text{ și } x > 2 \end{cases} . \text{ Deci, } h(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}. \dots\dots\dots \quad \mathbf{1p}$$

b) Pentru $x \in (-\infty, 2]$ avem $f_m(x) = x+1$ care este o funcție strict crescătoare. $\mathbf{0,5p}$

Pentru $x \in (2, \infty)$ avem $f_m(x) = mx - 3$ a cărei monotonie variază astfel:

Când $m < 0$ avem f_m funcție strict descrescătoare, ceea ce înseamnă că funcția nu va fi monotonă pe \mathbb{R} $\mathbf{0,5p}$

Când $m > 0$ avem f_m funcție strict crescătoare. Trebuie studiată monotonia pe \mathbb{R} .

Când $x \leq 2 \Rightarrow x+1 \leq 3 \Rightarrow f_m((-\infty, 2]) = (-\infty, 3]$ $\mathbf{0,5p}$

Când $x > 2 \Rightarrow mx - 3 > 2m - 3 \Rightarrow f_m((2, \infty)) = (2m - 3, \infty)$ $\mathbf{0,5p}$

Deci, $f_m((-\infty, 2]) \cap f_m((2, \infty)) = (-\infty, 3] \cap (2m - 3, \infty)$ $\mathbf{0,5p}$

Funcția f_m rămâne strict crescătoare pe \mathbb{R} dacă imaginile celor două ramuri ale funcției nu au puncte comune, adică $3 \leq 2m - 3 \Leftrightarrow m \geq 3$. Cum $m > 0 \Rightarrow m \in [3, \infty)$ $\mathbf{0,5p}$

Pentru $m \in (0, 3]$, imaginile vor avea puncte comune, deci funcția nu mai este monotonă pe \mathbb{R} $\mathbf{0,5p}$

Când $m = 0$ avem f_m funcție constantă, $f_m(x) = -3$, ceea ce înseamnă că funcția nu va fi monotonă pe \mathbb{R} , deoarece $-3 \in f_m((-\infty, 2]) = (-\infty, 3]$ $\mathbf{0,5p}$

Problema 3

Calculați expresiile:

a) $E = 2 \sin(-756^\circ) + \cos 54^\circ - \cos(-486^\circ) + \sin^2 216^\circ + \cos^2 144^\circ;$

$$b) F = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sin(3\pi - x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sin(\pi + x) \cdot \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)}.$$

Soluție:

$$\begin{aligned} a) E &= 2\sin(-756^\circ) + \cos 54^\circ - \cos(-486^\circ) + \sin^2 216^\circ + \cos^2 144^\circ = \\ &= -2\sin 756^\circ + \cos 54^\circ - \cos 486^\circ + \sin^2 216^\circ + \cos^2 144^\circ = \dots\dots\dots 1p \\ &= -2\sin 36^\circ + \cos 54^\circ - \cos 126^\circ + (-\sin 36^\circ)^2 + (-\cos 36^\circ)^2 = \dots\dots\dots 1p \\ &= -2\sin 36^\circ + \sin 36^\circ - \sin(-36^\circ) + \sin^2 36^\circ + \cos^2 36^\circ = \dots\dots\dots 1p \\ &= -2\sin 36^\circ + \sin 36^\circ + \sin 36^\circ + 1 = 1 \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

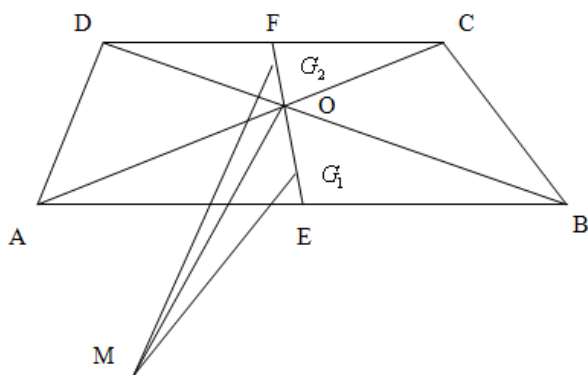
$$b) F = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sin(3\pi - x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sin(\pi + x) \cdot \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)} = \frac{\cos x \cdot \sin(-x) \cdot \sin x}{\cos(-x) \cdot (-\sin x) \cdot \sin x} = 1 \quad \begin{matrix} 6x0,5 \\ =3p \end{matrix}$$

Problema 4

În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Notăm cu G_1 centrul de greutate al $\triangle AOB$ și cu G_2 centrul de greutate al $\triangle DOC$. Arătați că pentru orice punct M din plan are loc egalitatea:

$$2(\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{MG_2}) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{G_1O} + \overrightarrow{G_2O}.$$

Soluție:



$$\text{În } \triangle AOB: \overrightarrow{MG_1} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MO}}{3}. \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Cum } \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + \frac{3}{2}\overrightarrow{G_1O}, \dots\dots\dots 1p$$

obținem

$$\overrightarrow{MG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{G_1O} = \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{MG_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{G_1O}. \quad (1) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Analog, } \overrightarrow{MG_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{G_2O} \quad (2). \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Din relațiile (1) și (2) obținem: } 2(\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{MG_2}) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{G_1O} + \overrightarrow{G_2O}, \text{ c.c.t.d. } \dots\dots\dots 1p$$